

5 Digitale Signalverarbeitung

Ziel des Kapitels ist es das Wissen zu vermitteln, wie die bekannten analogen Filterstrukturen digital in DSP-Systeme implementiert werden können.

Aus den verschiedenen Teilgebieten der digitalen Signalverarbeitung wird nachfolgend schwerpunktmässig die Thematik der digitalen Filterung behandelt. Für weiterführende Betrachtungen und andere Teilbereiche wird auf die zahlreiche Literatur verwiesen.

Für die nachfolgenden Kapitel wird komplexe Rechnung, DFT und FFT sowie die Grundlagen der Programmiersprache C und Assembler vorausgesetzt.

5.1 DSP Systeme

Ein einfaches digitales Signalverarbeitungssystem besteht aus den Funktionsblöcken:

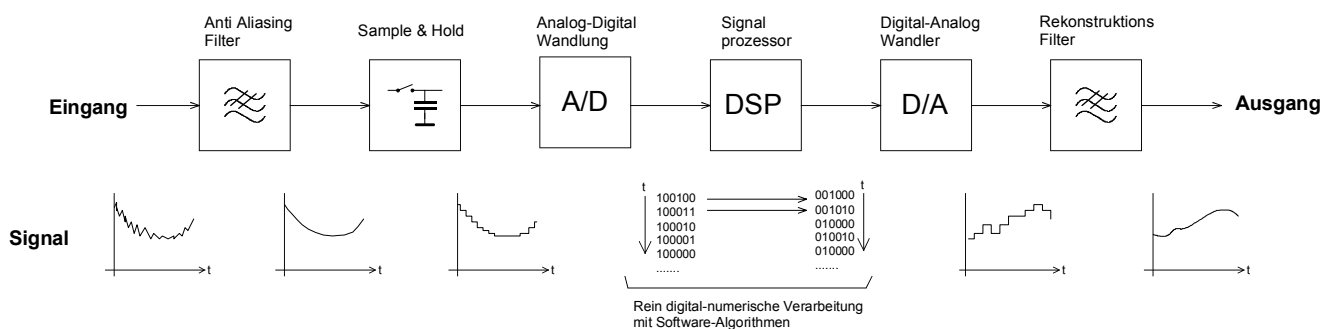


Bild 5-1:
Funktionsblöcke und Signalverlauf bei einem typischen DSP-System.

Bei der digitalen Signalverarbeitung werden die analogen Signale digitalisiert, mit einem Signalprozessor numerisch bearbeitet und bei Bedarf wieder in ein analoges Signal zurück gewandelt. Während für einfache Signalverarbeitung der Aufwand übertrieben erscheint, macht er schon für einfache Aufgaben (wie. z.B. Kalibrierung) Sinn.

Mit DSP-Systemen lassen sich viele Aufgaben problemlos realisieren, die mit analoger Technik nur schwierig beherrschbar sind, z.B.:

- Langzeitspeicherung von Signalen, Messwerten,
- Umfangreichere, präzise mathematische Rechnungen
- Sichere und verlustfreie Übertragung von Signalen
- Flexibles System, Änderungen meist per Software möglich

Typische Beispiele für Aufgaben wo digitale Signalverarbeitung eingesetzt wird:

- Filterung
- Faltung (Mischung zweier Signale)
- Korrelation (Vergleich zweier Signale)
- Gleichrichtung, Mittelwert- und Effektivwertbildung
- Lineare und nicht lineare Verstärkung
- Transformation (z.B. FFT)

Für digitale Filter ergeben sich, verglichen mit Analogfilter, weitere Vorteile:

- Kein Abgleich notwendig. Kein Einfluss von Alterung, Bauelementetoleranzen, Temperaturänderung
- Hohe Zuverlässigkeit, vollständig reproduzierbar
- Relativ unempfindlich gegen Störungen. Rauschen meist kein Problem
- Realisierung von Filtern, die in analoger Technik nicht oder nur sehr schwer zu realisieren sind:
 - Exakt linearphasige Filter
 - Extrem schmalbandige Filter
 - Filter mit sehr steilen Flanken
 - Filter für sehr niedrige Frequenzen
- Verschiedene Filtercharakteristiken in der gleichen Filterschaltung möglich
- Filtercharakteristik einfach veränderbar, auch adaptive Filter möglich

Man beachte, dass analoge Schaltungen durchaus gewisse Vorzüge aufweisen können. Zu den Nachteilen eines DSP Systems kann man sicherlich aufzählen:

- Hoher Initialaufwand
- Niedrige obere Frequenzgrenze des zu bearbeitenden Signals (< 1MHz)
- Störstrahlung des DSP

5.2 Signale

Für die digitale Signalverarbeitung ist es notwendig die Signale, welche bearbeitet werden sollen, in ihren Eigenschaften zu ordnen. Signale werden in zwei grobe Gruppen aufgeteilt:

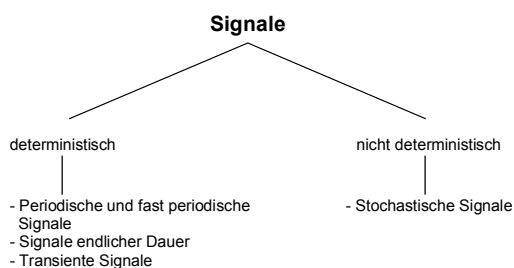


Bild 5-2:
Einteilung der Signale.

Periodische Signale

Periodische Signale haben eine endliche Leistung aber die Energie ist unendlich im Zeitintervall $[0, \infty)$. Für periodische Signale gilt: $x(t) = x(t + nT_0)$, wobei T_0 die Periodendauer und n eine ganze Zahl ist.

Wegen der endlichen Leistung genügt das Signal der Forderung der absoluten Integrierbarkeit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

kann aber nicht Fourier-Transformiert werden.

Beispiele sind Sinus-, Dreieck-Signal, etc., auch zusammengesetzte Signale.

```
t := linrange(0, 4, 200) s      ii := 0.. letzte(t)
f := 1Hz                       ω := 2πf
x := sin(ω · t) + sin(2ω · t)
```

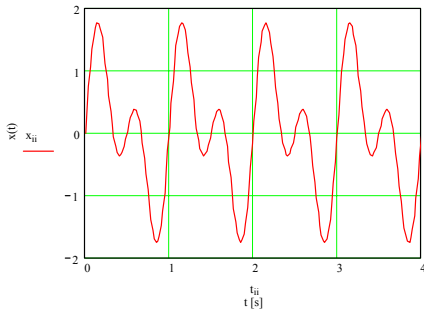


Bild 5-3:
Beispiel für periodisches Signal:
 $x(t) = \sin(\alpha t) + \sin(2\alpha t)$.

Signale endlicher Dauer

Sie besitzen eine endliche Energie und werden daher als Energie-Signale bezeichnet. Ihre Leistung ist im Zeitintervall $[0, \infty)$ verschwindend.

Beispiel: Einzelne Impulse, z.B. Rechteck-Impuls oder andere endliche Pulsfolge.

```
t := linrange(0, 4, 1000) s      ii := 0.. letzte(t)
f := 1Hz                         ω := 2πf
s(t) :=  $\begin{cases} \frac{4}{\pi} \left[ \sum_{i=0}^{20} \frac{1}{(2 \cdot i + 1)} \cdot \sin[(2 \cdot i + 1) \cdot \omega \cdot t] \right] & \text{if } t \geq 0 \wedge t \leq 2.2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
x_ii := s(t_ii)
```

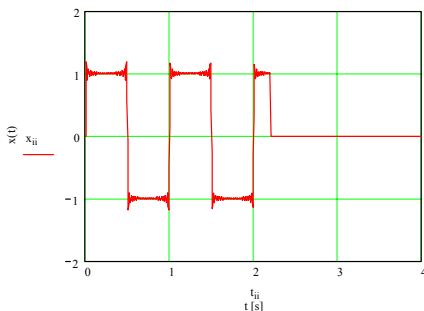


Bild 5-4:
Beispiel für Signal endlicher Dauer,
hier eine endliche Pulsfolge.

Transiente Signale

Sie verkörpern eine vorübergehende Auslenkung von einem konstanten Wert.

Beispiel: Störimpulse

```
t := linrange(0, 4, 1000) s      ii := 0.. letzte(t)
f := 1Hz                         ω := 2πf      u_1 := 1V      t_1 := 0.4s      t_2 := 2.2s
s(t) :=  $\begin{cases} u_1 & \text{if } t < t_1 \\ \left( u_1 + e^{-\frac{t-t_1}{1s}} \cdot 5 \cdot \sin(5\omega \cdot t) \right) & \text{if } t \geq t_1 \wedge t < t_2 \\ u_1 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
x_ii := s(t_ii)
```

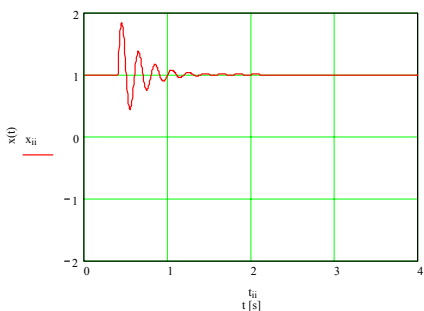


Bild 5-5:
Beispiel für ein transientes Signal in
Form einer überlagerten gedämpften
Schwingung.

Stochastische Signale

Diese Klasse verkörpert die in der Realität auftretenden Signale. Sie sind mehr oder weniger stark mit zufälligen Grössen behaftet. Darunter fallen alle elektrischen Signale die mit Störuschen und anderen nicht deterministischen Störimpulsen überlagert sind. Die Signalbeschreibung erfolgt mit statistischen Wahrscheinlichkeitsgrössen.

Viele stochastische Vorgänge haben die Eigenschaft, dass im Einzelnen keine Gesetzmässigkeit erkennbar ist, gesamthaft aber hinsichtlich der Zeit nichts ändert, z.B. beim thermischem Rauschen.

Beispiele: Rauschspannung an Widerständen und Halbleitern.

```
t := linrange(0, 4, 200) s      ii := 0.. letzte(t)
s(t) := rnd(2) - 1
xi := s(ti)
```

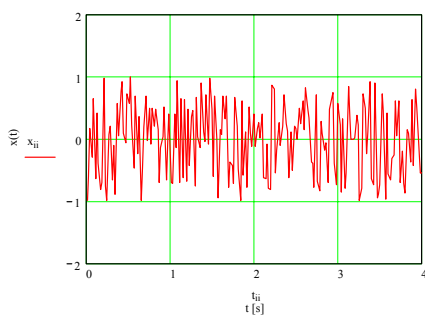


Bild 5-6:
Beispiel für ein rein stochastisches Signal in Form eines gleichverteilten (weissen) Rauschens.

Kausales Signal

Ein Signal nennt man Kausal wenn $x(t) = 0$ für $t < 0$.

Kontinuierlich – Diskret

Sind Signale in ihrem Zeit- und Amplitudenverhalten kontinuierlich, werden sie als analoge oder zeit- und wertkontinuierliche Signale bezeichnet. Bei einer Abtastung erfolgt eine zeitliche Diskretisierung, bei Quantisierung erfolgt eine wertmässige Diskretisierung.

Die Signale können daher bezüglich dieser Merkmale in 4 Gruppen aufgeteilt werden:

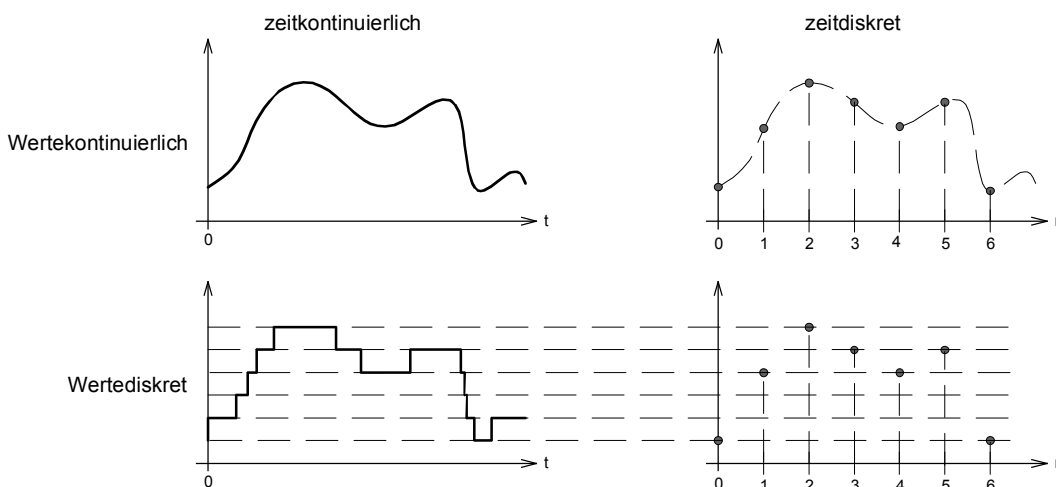


Bild 5-7:
Signalzuordnung in vier Klassen anhand der Kriterien Zeit/Wert-kontinuierlich/diskret.

5.3 LTI Systeme

LTI-Systeme sind lineare zeitinvariante Systeme (Linear Time Invariant System) und genügen den folgenden Definitionen:

Linearität:

$$x(n) = k_1 x_1(n) + k_2 x_2(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = k_1 y_1(n) + k_2 y_2(n) \quad (5-1)$$

Zeitinvarianz:

$$x(n+k) \quad \Rightarrow \quad y(n+k) \quad (5-2)$$

Bei diskreten LTI Systemen kann die Beziehung zwischen Eingangssignal $x(n)$ und Ausgangssignal $y(n)$ mit einer Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden.

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M b_i y(n-i) \quad (5-3)$$

N verkörpert die Ordnung des Systems, analog der Ordnung der Differenzialgleichung bei einem kontinuierlichen System.

Der Signalfuss in diskreten Systemen wird mit Hilfe von Signalfussgraphen dargestellt. Für diskrete Systeme benutzt man die Funktionsblöcke:

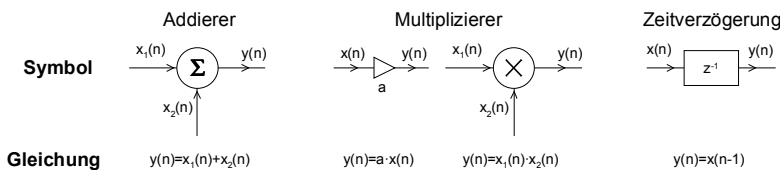


Bild 5-8:
Funktionsblöcke für diskrete Systeme.

Diskrete LTI-Systeme können daher aus drei Grundelementen: Addierer, Multiplizierer mit Konstante und Zeitverzögerung um eine Abtastperiode zusammengesetzt werden:

Beispiel 5-1: Mittelwertrechnung mit nicht-LTI-System

Der Mittelwert ist definiert $y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k)$ und soll als System mit den Funktionsblöcken nach Bild 5-8 realisiert werden. (Nach DSP-Kurs EE4773, Mississippi State University, 1996)

Lösung:

Durch Umformung erhält man die für die Realisierung benötigte Differenzgleichung:

$$(n+1) \cdot y(n) = x(n) + \sum_{k=0}^{n-1} x(k) = n \cdot y(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$

Das System kann mit der Anordnung der Funktionsblöcke realisiert werden:

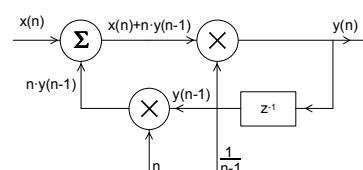


Bild 5-9:
Mittelwertrechner als System realisiert gemäss Beispiel 5-1. (Kein LTI-System)

Kausalität

Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal zum Zeitpunkt t_0 unabhängig von Werten des Eingangssignales zu Zeiten $t > t_0$ ist. (Wirkung kann nicht vor der Ursache eintreten)

Stabilität

Ein System ist stabil, wenn jedes beliebige Eingangssignal $x(t)$ mit einer endlichen Amplitude ein Ausgangssignal $y(t)$ mit einer endlichen Amplitude erzeugt. Man nennt dies BIBO-Stabilität (Bounded Input-Bounded Output).

Eine hinreichende und notwendige Bedingung ist, wenn die Impulsantwort $h(n)$ eines diskreten Systems absolut summierbar ist:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \quad (5-4)$$

(Die Impulsantwort ist das Ausgangssignal eines Systems dem am Eingang ein Dirac-Puls angelegt wird.) Gl. (5-4) impliziert, dass die Impulsantwort nach Null geht wenn N gegen Unendlich läuft, d.h. verschwindend ist.

Beispiel 5-2: Stabilität eines diskreten LTI Systems

Ein diskretes System hat die Impulsantwort $h(n) = a^n \cdot u(n)$. Ist es stabil nach (5-4)?

Lösung:

Man berechnet die absolute Summe. Es ist eine geometrische Reihe und man findet mit der Summenformel, dass sie für $a < \pm 1$ konvergiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n \cdot u(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = 1 + |a| + |a|^2 + \dots = \frac{1}{1 - |a|}$$

5.3.1 Zusammenfassung Signale und LTI-Systeme:

(Alle $n, k \in \mathbb{Z}$)

Signale:

Zeitkontinuierliches Signal: $x(t) = f(t)$ Bsp: $x(t) = 12 \cos(2\pi \cdot 1000 \cdot t)$

Zeitdiskretes Signal: $x(t) = f\left(\frac{n}{f_s}\right)$ Bsp: $x(t) = 12 \cos\left(2\pi \cdot 1000 \frac{n}{f_s}\right)$

Eigenschaften und Operationen:

Periodisches Signal: $x(n + N) = x(n)$

Symmetrie (gerade Fkt.): $x(-n) = x(n)$

Antisymmetrie (ungerade Fkt.): $x(-n) = -x(n)$

Verzögerung (Translation): $y(n) = x(n - k)$

Amplitudenskalierung: $y(n) = a \cdot x(n)$

Linearkombination: $y(n) = a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)$

Multiplikation: $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$

Zeitskalierung: $y(n) = x(a \cdot n)$

Diskrete Faltung: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k)$

Akkumulierung (Integration): $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$

Elementare diskrete Signale:

Einheitsstoss: $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

Einheitssprung: $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Einheitsrampe: $ur(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Beschreibungsgrößen für Signale:

Energie des diskreten Signals: $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

Mittelwert der Leistung: $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

Endliche Energie: $E_N = \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$

Systembeschreibungen:

Zeitinvariant: $x(n - k) \Rightarrow y(n - k)$

Linearität: $H(a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)) = a_1 \cdot H(x_1(n)) + a_2 \cdot H(x_2(n))$

Kausalität: $y(n) = f(x(n), x(n - 1), x(n - 2), \dots)$

5.4 Digitale Filter

Digitale Filter werden in grob in zwei Gruppen unterteilt:

FIR-Filter: Nicht rekursive Filter mit einer endlichen Impulsantwort

IIR-Filter: Rekursive Filter mit einer (theoretisch) unendlichen langen Impulsantwort

Beide Filtertypen haben in der Praxis ihre Vorzüge. FIR-Filter sind immer stabil, haben aber immer eine höhere Ordnung als vergleichbare IIR-Filter und sind in der Synthese aufwändiger. Ebenso können mit FIR-Filtern Eigenschaften erreicht werden, die mit IIR-Filtern nicht möglich sind, z.B. exakt linearphasige Filter, Hilbert-Transformator.

IIR-Filter haben im Vergleich eine kleinere Ordnung, sind daher einfacher und effizienter. Sie stellen aber hohe Anforderung an die Präzision der Koeffizienten und Berechnung und können instabiles Verhalten zeigen.

Eine vergleichende Tabellarische Zusammenstellung der Eigenschaften nach [TIE99], S. 1185:

Merkmal	FIR-Filter	IIR-Filter
Selektivität	Gering	Hoch
Erforderliche Filterordnung	hoch	niedrig
Anzahl MAC-Operationen	viele	wenige
Speicherbedarf	hoch	gering
Lineare Phase	problemlos	kaum möglich
Konstante Gruppenlaufzeit	problemlos	kaum möglich
Stabilität	unbedingt	bedingt
Erforderliche Wortbreite	mässig	hoch
Erforderliche Koeff. Genauigkeit	mässig	hoch
Grenzyklen	keine	vorhanden
Adaptive Filter	möglich	kaum möglich

5.4.3 FIR-Filter

FIR-Filter, auch Transversalfilter genannt, haben als nicht rekursive Struktur keine Rückkopplung. Am Ausgang des Systems erscheint eine gewichtete Summe der zeitverzögerten Eingangssignale.

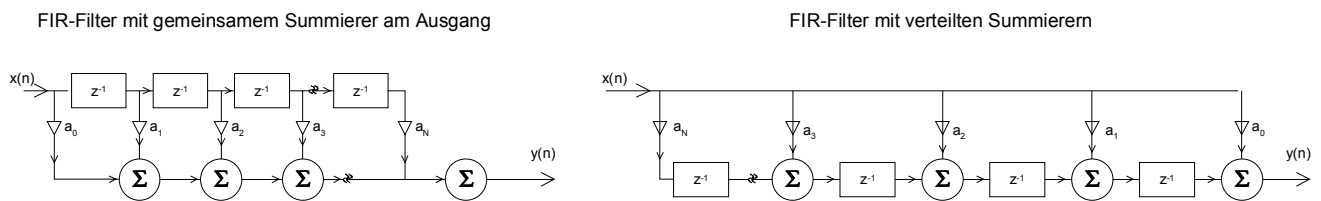


Bild 5-10:
Blockschaltbild zweier gebräuchlicher FIR-Filter Strukturen.

Die Übertragungsfunktion wird wegen fehlender Rückführung durch Nullsetzen der b_k -Koeffizienten für $k=1..M$:

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}} \quad \rightarrow \quad b_0=1, \text{Rest } 0 \quad \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \sum_{k=0}^N a(k) z^{-k} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N} \quad (5-5)$$

Hierbei ist N die Ordnung des Filters, gegeben durch Polynomgrad der Übertragungsfunktion. $N+1$ ist die Länge L des Filters, d.h. Anzahl der Koeffizienten. Dies sieht man durch Erweitern der Gleichung (5-5) mit z^N :

$$G(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N}{z^N} \quad (5-6)$$

Aus dieser Darstellung der Übertragungsfunktion erkennt man auch, dass alle Pole im Ursprung liegen und das Filter zwangsläufig immer stabil ist. Alle Nullstellen liegen auf dem Einheitskreis. Die Impulsantwort ist endlich und hat die Länge $L=N+1$.

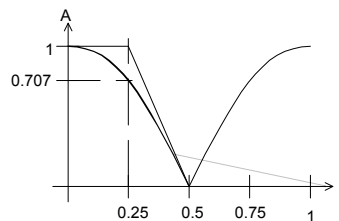
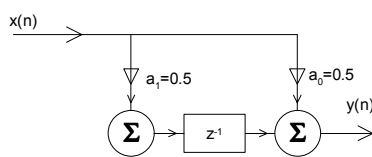
Im Zeitbereich wird das Ausgangssignal durch die gewichtete Summe der zeitverzögerten Eingangssignale bestimmt.

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(n-k) \quad (5-7)$$

Diese Differenzgleichung lässt sich problemlos in Rechner implementieren

Beispiel 5-3 FIR Filter 1. Ordnung nach: (Tiefpass/Integrator)

Man bestimme aus dem FIR-Filter 1. Ordnung die DC-Dämpfung und die Dämpfung bei der halben Abtastfrequenz. Beispiele nach [TIE99], S.1149.



$$G(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})$$

$$f_c = 0.25$$

Bild 5-11:
FIR-Tiefpass 1. Ordnung für Beispiel 5-3.

Lösung:

Die Dämpfung bei Gleichspannung eines FIR-Filters ist die Summe aller Filterkoeffizienten.

$$A_{DC} = a_0 + a_1 = 0.5 + 0.5 = 1.0$$

Die Dämpfung des FIR-Filters bei der halben Abtastfrequenz ist gleich der im Wechsel mit +1/-1 gewichteten Koeffizientensumme.

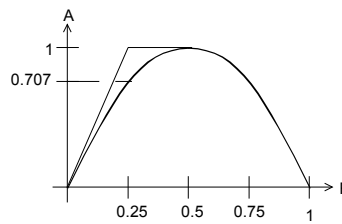
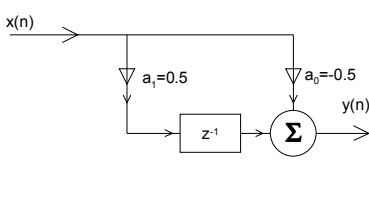
$$A_{\frac{f_s}{2}} = a_0 - a_1 = 0.5 - 0.5 = 0$$

Bemerkung:

Werden alle Koeffizienten mit einem konstanten Faktor multipliziert bleibt die Filtercharakteristik erhalten, es ändert nur die Grundverstärkung.

Beispiel 5-4: FIR-Filter 1. Ordnung (Hochpass/Differenziator)

Man bestimme für das folgende Hochpassfilter 1. Ordnung die DC-Dämpfung und die Dämpfung bei der halben Abtastfrequenz. Beispiel nach [TIE99], S.1150.



$$G(z) = \frac{1}{2}(-1 + z^{-1})$$

$$f_c = 0.25$$

Bild 5-12:
FIR-Hochpass 1. Ordnung für Beispiel 5-4.

Lösung:

$$A_{DC} = a_0 + a_1 = -0.5 + 0.5 = 0$$

$$A_{\frac{F_S}{2}} = a_0 - a_1 = -0.5 - 0.5 = -1$$

Beispiel 5-5: FIR-Filter 9. Ordnung

Man ermittle den Amplitudengang und Dämpfungen bei DC und $f_s/2$ des Filters, das durch ein Filtersyntheseprogramm generiert wurde:

Lösung:

Vorgaben: (Generiert mit QED2000)
 $f_c=0.25, f_H=0.35, f_S=1, N=9$

$$a := \begin{pmatrix} 6.96798563 \cdot 10^{-2} \\ -5.74193001 \cdot 10^{-2} \\ -8.61289501 \cdot 10^{-2} \\ 2.78719544 \cdot 10^{-1} \\ 5.52410960 \cdot 10^{-1} \\ 2.78719544 \cdot 10^{-1} \\ -8.61289501 \cdot 10^{-2} \\ -5.74193001 \cdot 10^{-2} \\ 6.96798563 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$dB(x) := 20 \cdot \log(x)$$

Berechnungen:

$$N := \text{zeilen}(a)$$

$$N = 9$$

$$A_{DC} := \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$

$$A_{DC} = 0.962$$

$$dB(A_{DC}) = -0.335$$

$$A_{FS2} := \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot (-1)^k$$

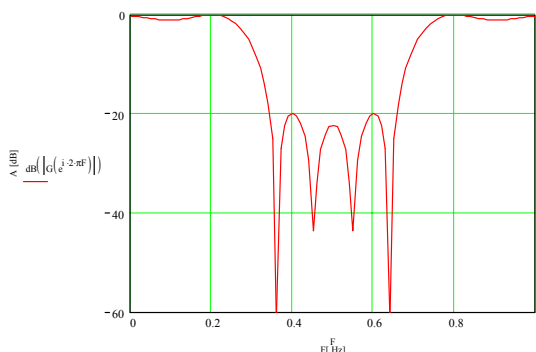
$$A_{FS2} = 0.077$$

$$dB(A_{FS2}) = -22.28$$

$$F := 0.0, 0.01, \dots, 1$$

$$G(z) := \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot z^{-k}$$

$$f_s := 1$$



```
FIR-Filter 9.Ordnung Beispiel.spw - Editor
Datei Bearbeiten Suchen ?
Filter 1.0
Method: Windowed_Sinc/LowPass_Rectangular
Comment: Created by QED
$
PARAMETERS
sample_freq DOUBLE 1 Sampling Freq
passband_edge DOUBLE 0.25 Passband Edge
stopband_edge DOUBLE 0.35 Stopband Edge
passband_ripple DOUBLE 0.1 Passband Attenuation
stopband_ripple DOUBLE 30 Stopband Attenuation
filter_order DOUBLE 8 Filter Order
$
COEFFICIENTS
Poly filter
9 numerator coefficients (b)
1 denominator coefficient (a)
b[0] = 6.96798563e-002
b[1] = -5.74193001e-002
b[2] = -8.61289501e-002
b[3] = 2.78719544e-001
b[4] = 5.52410960e-001
b[5] = 2.78719544e-001
b[6] = -8.61289501e-002
b[7] = -5.74193001e-002
b[8] = 6.96798563e-002
a[0] = 1.0
$
```

Bild 5-13: FIR-Bandsperre mit 9 Taps.

Fenster: Filterkoeffizienten vom Syntheseprogramm.
 Links: Auswertung des Amplitudenganges.

Beispiel 5-6: Impulsantwort eines FIR Tiefpassfilters

Man bestimme für das Filter in Beispiel 5-3 die Impulsantwort und verifiziere, dass sie $N+1$ Werte lang ist.

Lösung:

i	$x(i)$	$y(i)$
0	1	0.5
1	0	0.5
2	0	0
3

Das Filter hat Ordnung 1, daher ist die Impulsantwort 2 Werte lang.

5.4.4 Synthese der FIR Filterkoeffizienten

In der Praxis erfolgt die Synthese durchwegs mit Syntheseprogrammen. Das Resultat der Synthese ist immer der Filterkoeffizientensatz a_0, \dots, a_N nach (5-5), der die Filteranforderungen erfüllt. Alle Methoden zur Koeffizientensynthese sind Näherungsverfahren. Dies zeigt sich auch in mehr oder weniger grossen Abweichungen vom Ideal.

Bei Rechnung mit Fixkomma-Prozessoren müssen die berechneten Filterkoeffizienten vielfach noch etwas nachbearbeitet werden damit sichergestellt ist, dass keine unzulässigen Rechenbereichsüberläufe erfolgen können.

Zur Koeffizientenbestimmung werden zwei grundlegende Methoden verwendet, die nachfolgend beschrieben werden:

- Window-Methoden
- Remez-Exchange

5.4.5 Window-Methode

Sie ist als grundlegende Methode einfach und intuitiv nachvollziehbar. Hierbei werden die Filterkoeffizienten aus der Impulsantwort des zu realisierenden Filters bestimmt. Vom Prinzip her wäre diese Methode exakt, da aber nur endlich viele Werte implementiert werden können, weist dieses Prinzip mehr oder weniger grosse Abweichungen auf, die sich vor allem in der erreichbaren Sperrdämpfung und Flankensteilheit störend äussern.

5.4.6 Grundlagen der Window-Methode

Die zu erwartende Impulsantwort ist die Invers-Fouriertransformierte des Frequenzganges $F(j\omega)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \tag{5-8}$$

Beim zeitdiskreten System wird mit der Abtastfrequenz f_s und der Zeit als Vielfache der Abtastperiodendauer $t = nT_s = \frac{n}{f_s}$:

$$y(nT_s) = \int_{-\frac{1}{2}f_s}^{+\frac{1}{2}f_s} F(jf) \cdot e^{j2\pi n f T_s} df \quad (5-9)$$

Die gesuchten Koeffizienten a_k sind nun die Lösung der Gleichung:

$$y(nT_s) = \int_{-\frac{1}{2}f_s}^{+\frac{1}{2}f_s} F(jf) \cdot e^{j2\pi n f T_s} df = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x(n-k) \quad (5-10)$$

Die detaillierte Lösung und weitere Ausführungen sind in [TIE99], S. 1154 nachzulesen.

Durch das Verhalten von Fourierreihen bei Unstetigkeitsstellen immer eine Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich. Sie ist grundsätzlich zu beobachten, wenn mit Fourierreihen eine unstetige Funktion modelliert wird. Die Welligkeit verschwindet auch nicht wenn die Zahl der Koeffizienten erhöht wird, sondern konzentriert sich nur stärker im Bereich der Grenzfrequenz. Dieser Effekt wird *Gibbs-Phänomen* genannt (s. hierzu auch Bild 5-4).

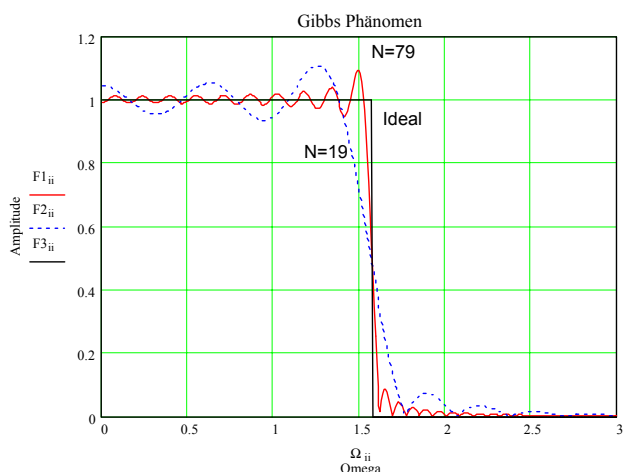


Bild 5-14:
Näherung des Amplitudenganges mit Filterordnungen $N=19$ und $N=79$ an das Ideal.
Gut zu beobachten ist das Gibbs-Phänomen, wie die Welligkeit sich bei steigender Ordnung bei Flanke konzentriert.

Abhilfe kann durch geeignete Gewichtung der Filterkoeffizienten erfolgen. Hierbei werden die Randkoeffizienten geeignet reduziert. Allerdings steigt auch die benötigte Filterordnung bei gleicher Flankensteilheit. Daher verkörpern die so bestimmten Filterkoeffizienten nur Rohwerte, die nicht direkt implementiert werden können.

5.4.7 Berechnung der Filterkoeffizienten

Aus der Impulsantwort des Sprunges als ideale Filterfunktion erhalten wir die sinc-Funktion. Für das zu realisierende Filter wird eine endliche Anzahl Werte äquidistant ausgewählt. Diese Werte verkörpern direkt die idealen Filterkoeffizienten:

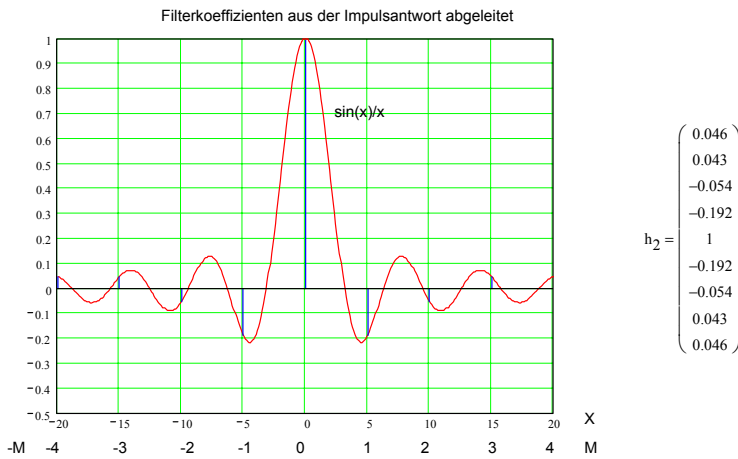


Bild 5-15: Impulsantwort des idealen Filters.

Der Vektor h_2 enthält die nicht kausalen Filterkoeffizienten. Die Filterkoeffizienten des kausalen Systems können durch eine Indexverschiebung bestimmt werden. Der Bereich $[-M, +M]$ wird übergeführt in $[0, 2M]$, wobei $2M$ der Ordnung N des FIR-Filters entspricht.

Die Impulsantwort, d.h. die Filterkoeffizienten für ein FIR-Filter der Länge L werden für die verschiedenen Durchlasscharakteristiken:

Tiefpass:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_c\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	
Hochpass:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_c}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi\right) - \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_c\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	
Bandpass:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c2}\right) - \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c1}\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	
Bandsperre:	$h_1(i) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_{c2} + \Omega_{c1}}{\pi} & i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi\right) - \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c2}\right) + \sin\left(\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_{c1}\right)}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{sonst} \end{cases}$	$i = \frac{L-1}{2}$	

Beispiel 5-7: Berechnung der idealen FIR-Filterkoeffizienten

Man bestimme für ein FIR-Tiefpass mit der Ordnung 20 die idealen Filterkoeffizienten. Die Grenzfrequenz beträgt 100Hz, die Samplefrequenz 1kHz.

Lösung:

Mit (5-11) findet man direkt die Koeffizienten:

Vorgaben :

- $f_S := 1\text{kHz}$ Sampling Frequenz
- $f_C := 100\text{Hz}$ Grenzfrequenz Durchlass
- $N := 20$ Filterordnung

Berechnungen :

$\omega_C := 2\pi \cdot f_C$ $i := 0.. N$
 $L := N + 1$ Anzahl Taps (Ordnung+1)

$\Omega_C := \frac{\omega_C}{f_S}$ $\Omega_C = 0.628$ Normierte Grenzfrequenz des idealen Filters

$$h_{LP}(i, \Omega_C, L) := \begin{cases} \frac{\Omega_C}{\pi} & \text{if } i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_C\right]}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Ideale Tiefpass
FIR-Filterkoeffizienten**

$h_i := h_{LP}(i, \Omega_C, L)$

	0
0	0
1	-0.021
2	-0.038
3	-0.043
4	-0.031
5	0
6	0.047
7	0.101
8	0.151
9	0.187
10	0.2
11	0.187
12	0.151
13	0.101
14	0.047
15	0
16	-0.031
17	-0.043
18	-0.038
19	-0.021
20	0

5.4.8 FIR-Filtertypen

FIR-Filter werden anhand der Koeffizientensymmetrie in vier verschiedene Typen mit unterschiedlichen Eigenschaften und Einsatzmöglichkeiten aufgeteilt:

Typ	Eigenschaften	Eignung
1	Ungerade Länge und symmetrische Koeffizienten. Phasenlinear.	LP, HP, BP und BS
2	Gerade Länge und symmetrische Koeffizienten. Phasenlinear	TP, BP
3	Ungerade Länge antisymmetrische Koeffizienten	Hilbert-Transformator
4	Gerade Länge und antisymmetrische Koeffizienten	HP, BS, Hilbert-Transformator

Filter für „gewöhnliche“ Filteranforderungen sind daher meist vom Typ 1, selten Typ 2. Filter mit symmetrischen Filterkoeffizienten sind immer phasenlinear. Sie haben daher konstante Gruppenlaufzeit. Aufgrund der in der Praxis benötigten hohen Filterordnungen haben aber alle FIR-Filter eine relativ lange Durchlaufzeit.

5.4.9 Window-Funktionen

Die nicht idealen Effekte, die aufgrund der endlichen Anzahl Filterkoeffizienten zu beobachten sind, kann durch Benutzung eines Gewichtsfensters gemildert werden. Das Prinzip dabei ist, dass die mittleren Filterkoeffizienten stärker gewichtet werden als die Koeffizienten am Anfang und Ende:

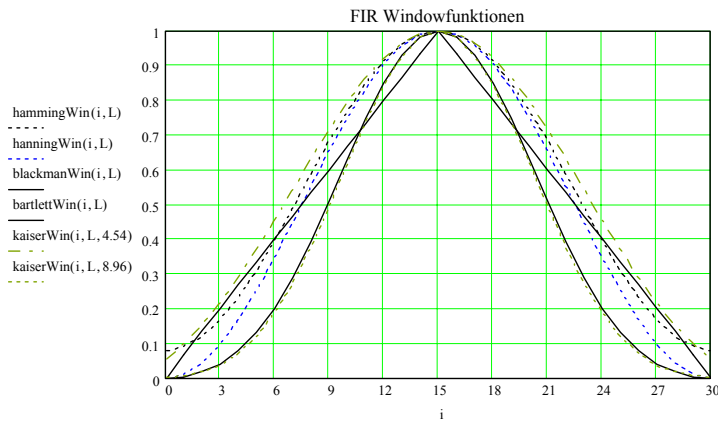


Bild 5-16: Gebräuchliche Window-Funktionen zur Bewertung der idealen Filterkoeffizienten.

Es existieren zahlreiche Fensterfunktionen, die die maximal erreichbare Sperrdämpfung definieren:

Fenster	Sperrdämpfung [dB]	Fensterdämpfung (L gross)	Fensterfunktion $w(i)$	(5-15)
Rechteck	21	1	$w(i) = 1$	
Bartlett	25	0.5	$w(i) = 1 - \frac{2 \left i - \frac{L-1}{2} \right }{L-1}$	(5-16)
Hanning	44	0.5	$w(i) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi \cdot i}{L-1}\right)$	(5-17)
Hamming	53	0.54	$w(i) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi \cdot i}{L-1}\right)$	(5-18)
Blackman	74	0.423	$w(i) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi \cdot i}{L-1}\right) - 0.08 \cos\left(\frac{4\pi \cdot i}{L-1}\right)$	(5-19)
Kaiser ($\gamma=2.12$)	30	0.78	$w(i) = \frac{J_0\left(2\gamma \sqrt{i \cdot (L-i-1)}\right)}{J_0(\gamma)}$	(5-20)
Kaiser ($\gamma=4.54$)	50	0.569	dito	
Kaiser ($\gamma=7.76$)	70	0.442	dito	
Kaiser ($\gamma=8.96$)	90	0.412	dito	

(Weitere Fensterfunktionen sind in [SMI94] S.37 und folgende aufgeführt.)

Mit dieser Massnahme wird vor allem das Sperrverhalten verbessert. Im Gegenzug verschlechtert sich aber die Flankensteilheit und das Signal erfährt eine zusätzliche Dämpfung.

Näherungsweise kann man sagen, dass je stärker die erreichte Sperrdämpfung ansteigt, desto mehr verschlechtert sich die Flankensteilheit bei gleicher Filterlänge L . Natürlich kann wiederum die Filterlänge erhöht werden um die Flankensteilheit zu verbessern.

Grundsätzlich sind Kaiser-Windows die beste Wahl bezüglich erreichte Flankensteilheit/Filterlänge und erreichte Sperrdämpfung. Zusätzlich existiert für Kaiser-Filter eine heuristische Formel die aus den Sperrforderung die notwendige Filterordnung abschätzt.

Beispiel 5-8: FIR Fensterkoeffizienten bestimmen

Man bestimme für ein FIR-Filter mit 11 Taps die Gewichtskoeffizienten für alle aufgezeigten Fensterfunktionen.

Lösung:

Unter Anwendung der Formeln (5-15)..(5-20) findet man:

Gewichtskoeffizienten für Filterlänge=11 Taps

$L := 11$

$i := 0..L - 1$

hammingWin(i, L) =	bartlettWin(i, L) =	blackmanWin(i, L) =	hanningWin(i, L) =
0.08	0	0	0
0.168	0.2	0.04	0.095
0.398	0.4	0.201	0.345
0.682	0.6	0.51	0.655
0.912	0.8	0.849	0.905
1	1	1	1
0.912	0.8	0.849	0.905
0.682	0.6	0.51	0.655
0.398	0.4	0.201	0.345
0.168	0.2	0.04	0.095
0.08	0	0	0

kaiserWin(i, L, 2.12) =	kaiserWin(i, L, 4.54) =	kaiserWin(i, L, 7.76) =	kaiserWin(i, L, 8.93) =
0.403	0.055	$2.927 \cdot 10^{-3}$	$9.768 \cdot 10^{-4}$
0.583	0.216	0.059	0.037
0.749	0.455	0.238	0.188
0.883	0.718	0.547	0.496
0.97	0.922	0.864	0.844
1	1	1	1
0.97	0.922	0.864	0.844
0.883	0.718	0.547	0.496
0.749	0.455	0.238	0.188
0.583	0.216	0.059	0.037
0.403	0.055	$2.927 \cdot 10^{-3}$	$9.768 \cdot 10^{-4}$

Bemerkung:

Man erkennt, dass Bartlett-, Blackman- und Hanning-Fenster den ersten und letzten Koeffizienten immer Null setzen. Grundsätzlich sollte man vermeiden, entstehende Werte mit Null zu multiplizieren, da hier immer etwas verloren geht.

Beispiel 5-9: Kaiser-Filter mit 21 Taps

Man bestimme die Filterkoeffizienten für ein Kaiser-Tiefpass mit 21 Taps. Die Abtastfrequenz beträgt 9.6kHz, die Grenzfrequenz soll 1kHz betragen. Die Sperrdämpfung soll ≥ 50 dB betragen.

Lösung:

Man bestimmt zuerst die idealen Filterkoeffizienten aus der Impulsantwort nach (5-11):

Vorgaben :

$f_s := 9.6 \cdot 10^3$ [Hz] Sampling Frequenz
 $f_c := 1 \cdot 10^3$ [Hz] Grenzfrequenz Durchlass
 $L := 21$ Anzahl Taps

Berechnungen :

$\omega_c := 2\pi \cdot f_c$ $i := 0..L-1$
 $\Omega_c := \frac{\omega_c}{f_s}$ $\Omega_c = 0.654$ Normierte Grenzfrequenz des idealen Filters

$$h_{LP}(i, \Omega_c, L) := \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{if } i = \frac{L-1}{2} \\ \frac{\sin\left[\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\Omega_c\right]}{\left(i - \frac{L-1}{2}\right)\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Ideale Tiefpass
FIR-Filterkoeffizienten**

$h_1 := h_{LP}(i, \Omega_c, L)$

$h_1 =$

0	
0	8.238·10 ⁻³
1	-0.014
2	-0.034
3	-0.045
4	-0.038
5	-8.31·10 ⁻³
6	0.04
7	0.098
8	0.154
9	0.194
10	0.208
11	0.194
12	0.154
13	0.098
14	0.04
15	-8.31·10 ⁻³
16	-0.038
17	-0.045
18	-0.034
19	-0.014
20	8.238·10 ⁻³

Ein Sperrdämpfung von ≥ 50 dB erfordert ein Kaiser- γ von 4.54. Man bestimmt mit (5-20) die Gewichtskoeffizienten w und bewertet die idealen Koeffizienten aus h_1 . Wir erhalten das Resultat in h_2 :

$$\text{kaiserWin}(i, L, \gamma) := \frac{10^{\left[2 \cdot \frac{\gamma \cdot \sqrt{i \cdot (L-i-1)}}{L-1}\right]}}{10^{\gamma}}$$

$\gamma := 4.54$

$w_i := \text{kaiserWin}(i, L, \gamma)$

$h_2 := w_i \cdot h_1$

ideale
Filterkoeffizienten

$h_1 =$

0	
0	8.238·10 ⁻³
1	-0.014
2	-0.034
3	-0.045
4	-0.038
5	-8.31·10 ⁻³
6	0.04
7	0.098
8	0.154
9	0.194
10	0.208
11	0.194
12	0.154
13	0.098
14	0.04
15	-8.31·10 ⁻³
16	-0.038
17	-0.045
18	-0.034
19	-0.014
20	8.238·10 ⁻³

Kaiser $\gamma=4.54$
Fensterkoeffizienten

$w =$

0	
0	0.055
1	0.124
2	0.216
3	0.329
4	0.455
5	0.588
6	0.718
7	0.832
8	0.922
9	0.98
10	1
11	0.98
12	0.922
13	0.832
14	0.718
15	0.588
16	0.455
17	0.329
18	0.216
19	0.124
20	0.055

Kaiser-gewichtete
Filterkoeffizienten

$h_2 =$

0	
0	4.55·10 ⁻⁴
1	-1.679·10 ⁻³
2	-7.45·10 ⁻³
3	-0.015
4	-0.017
5	-4.89·10 ⁻³
6	0.029
7	0.082
8	0.142
9	0.19
10	0.208
11	0.19
12	0.142
13	0.082
14	0.029
15	-4.89·10 ⁻³
16	-0.017
17	-0.015
18	-7.45·10 ⁻³
19	-1.679·10 ⁻³
20	4.55·10 ⁻⁴

Eine Kontrollrechnung zeigt den erwarteten Amplitudengang:

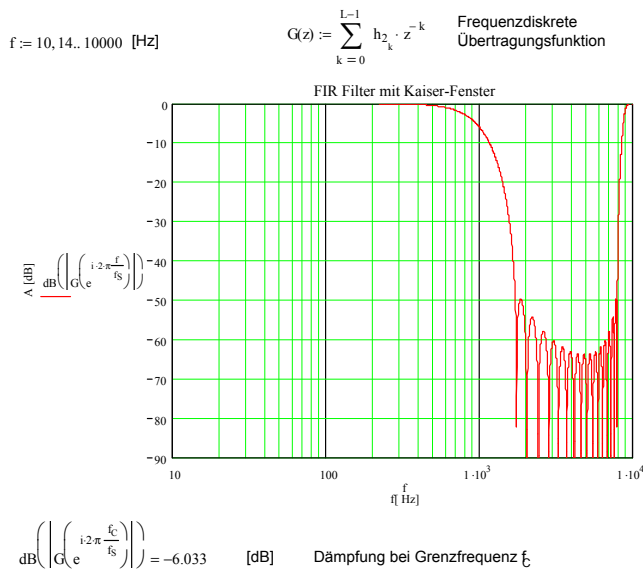


Bild 5-17: Berechnung und resultierende Amplitudengang für das Kaiser-Filter nach Beispiel 5-9.

5.4.10 Remez-Exchange Methode (Equiripple-Filter)

Dieses Verfahren, das auch unter den Namen Equiripple-FIR, Parks-McClellan bekannt ist, liefert immer die aufwandminimalsten FIR-Filter. Mit einem Näherungsverfahren werden Filter mit konstanter Welligkeit im Durchlass-, wie auch im Sperrbereich erzeugt.

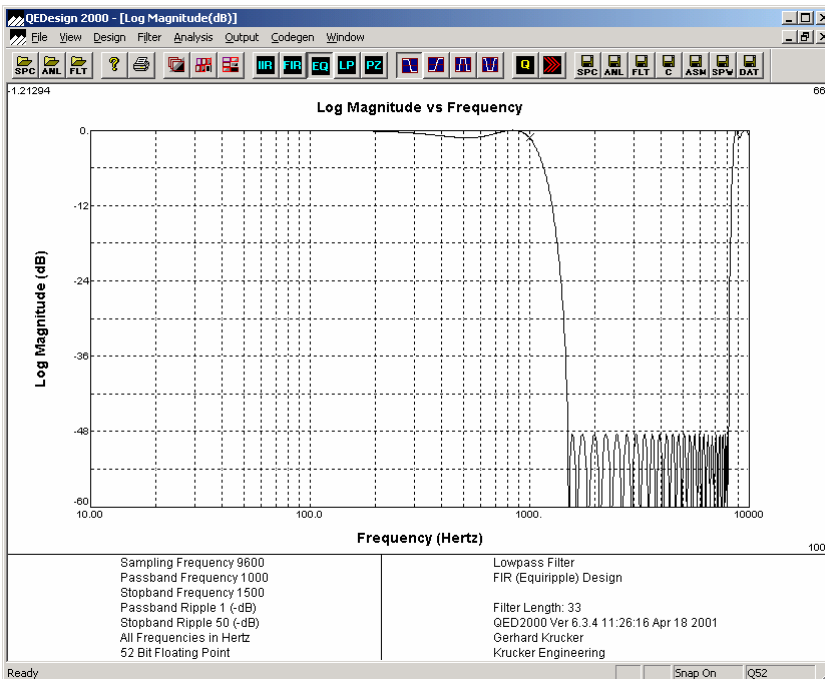


Bild 5-18: Amplitudengang eines Equiripple-Filters mit $L=33$ Taps.

Bei den Filter, die mit Window-Technik berechnet wurden, sieht man im Sperrbereich die nicht konstante Welligkeit, wie z.B. in Bild 5-17. Generell nimmt die Welligkeit bei Window-basierten Filter in der Nähe des Übergangsbereiches, d.h. im Bereich der Flanke, zu.

Es lässt sich überlegen, dass dies keine optimale Lösung im Sinne minimalen Filteraufwandes sein kann, da in bestimmten Bereichen zu stark gefiltert wird. Eine aufwandminimale Lösung würde im Durchlass- und Sperrbereich überall die gleiche definierte Welligkeit aufweisen.

Das Verfahren von Parks-McClellan liefert mit dem Remez-Exchange Algorithmus in einem Iterationsverfahren die Lösung eines Filters mit konstanter Welligkeit (Equiripple-Filter). Nachteil des Verfahrens ist, dass wegen Konvergenzproblemen manchmal eine Lösung nicht gefunden wird. Das Verfahren selbst ist nur numerisch lösbar, für hohe Ordnungen relativ aufwändig, aber gut dokumentiert und frei verfügbar. Es sei hierzu auf die zahlreichen Publikationen verwiesen.

In der Praxis wird man, wenn immer möglich ein Equiripple-Filter verwenden, weil es das einfachste (kürzeste) FIR-Filter ist, das die Filteranforderung erfüllt. Der Entwurf erfolgt mit den zahlreich verfügbaren kommerziellen Filterdesignprogrammen oder mit Matlab.

5.4.11 Prinzip des Remez-Exchange Algorithmus

Das Verfahren approximiert mit einem Iterationsverfahren eine eindeutige polynomiale Funktion $p_n(x)$, die innerhalb eines Fehlerbandes $\pm h$ die Vorgaben $p_n(x_i) = y_i \pm h$ erfüllt. Das Polynom oszilliert innerhalb des Fehlerbandes in den lokalen Extremwerten um $\pm h$. Der Polynomgrad n und das Fehlerband $\pm h$ kann frei gewählt werden.

Vorgehen

1. Die Bestimmung des Ausgleichspolynoms $p_n(x)$ vom Grad n für eine Menge von $n+2$ Datenpunkten (x_i, y_i) erfolgt durch Lösung des linearen Gleichungssystems für die Polynomkoeffizienten a_0, \dots, a_n und den Fehler h . Vorgegeben sind die erreichenden Funktionswerte y_i ($i=1..n+2$). Man erhält daher ein Gleichungssystem mit $n+2$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots + a_n x_1^n - h &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots + a_n x_1^n + h &= y_2 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \dots + a_n x_2^n - h &= y_3 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \dots + a_n x_3^n + h &= y_4 \\ &\dots \\ a_0 + a_1 x_{n+2} + a_2 x_{n+2}^2 + a_3 x_{n+2}^3 + \dots + a_n x_{n+2}^n + (-1)^{n+2} h &= y_{n+2} \end{aligned}$$

2. Bestimmen der $n+2$ Extrema der Abweichungen von der Vorgabe.
3. Bestimmen des neuen Ausgleichspolynom vom Grad n unter Verwendung neuer Werte x_i , die an den Extrema liegen, wie in 1.
4. Wiederholen bis der Fehler $\pm h$ genügend den Vorgaben genügt.

Beispiel 5-10: Equiripple Polynomausgleichsfunktion

Man bestimme das Equiripple-Ausgleichspolynom 5. Grades das die Funktion $f(x)$ im Intervall $x=[0,2]$ beschreibt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Lösung:

Für ein Ausgleichspolynom 5. Grades $p_5(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$ werden $n+2=7$ Punkte benötigt. Man legt die x -Werte äquidistant $x_i = \{0, .333, 0.666, 1, 1.333, 1.666, 2\}$. Das Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, \dots, a_n , den Fehler h wird dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 & 1/81 & 1/243 & 1 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 & 16/81 & 32/243 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 16/9 & 64/27 & 256/81 & 1024/243 & -1 \\ 1 & 5/3 & 25/9 & 125/27 & 625/81 & 3125/243 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4/3 \\ 5/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

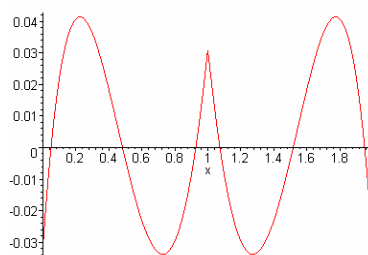
Man erhält die Lösung:

$$p_{s1}(x) = \frac{31}{32} + \frac{3}{4}x - \frac{19}{8}x^2 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{16}x^4 + 0x^5 \quad h = -\frac{1}{32}$$

Die Extremwerte des Fehlers liegen bei:

Bild 5-19: Verlauf des Fehlers der ersten Näherung $f(x)-p_{s1}(x)$ in Beispiel 5-10.

x	$f(x)-p_{s1}(x)$
0.0	-1/32
0.2237	0.041454623
0.72715	-0.033845456
1	1/32
1.2729	-0.033845456
1.7763	0.041454623
2.0	-1/32



Nun wird das Gleichungssystem neu aufgestellt. Die neuen x-Werte werden durch die Extremstellen repräsentiert:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 0.22371 & 0.05005 & 0.1120 & 0.02505 & 0.0005603 & 1.0 \\ 1.0 & 0.7211 & 0.5287 & 0.3485 & 0.2796 & 0.2033 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.273 & 1.620 & 2.062 & 2.625 & 3.341 & -1.0 \\ 1.0 & 1.776 & 3.155 & 5.605 & 9.955 & 17.68 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 & 8.0 & 16.0 & 32.0 & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.284 \\ 1.777 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

Man erhält die Lösung:

$$p_{s2}(x) = 0.966233 + 0.7001747x - 2.230302x^2 + 2.130215x^3 - 0.532554x^4 + 0x^5 \quad h = -0.033766849$$

Und nach einem weiteren Schritt:

$$p_{s3}(x) = 0.96619 + 0.700783x - 2.231474x^2 + 2.13108x^3 - 0.532771x^4 + 0x^5 \quad h = .03381045$$

Man erkennt, dass der Fehler sich kaum mehr verändert und die Iteration abgebrochen werden kann.

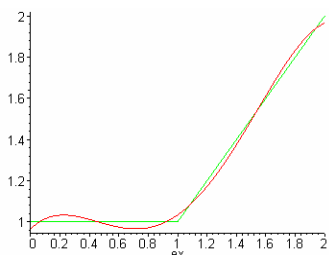


Bild 5-20: Funktionsverlauf der dritten Näherung $p_{s3}(x)$ und Vorgabe in Beispiel 5-10.

Die Remez-Echange-Methode stellt hohe Anforderungen an die numerische Rechenleistung und Präzision, vor allem bei grossen Filterordnungen.

5.4.12 IIR Filter

IIR-Filter (Infinite Impulse Response Filter) rekursive Filter mit einer (theoretisch) unendlich langen Impulsantwort. Zur Synthese sind vor allem drei Methoden gebräuchlich. Sie sind in Angleichung an die Literatur unter ihrem englischen Namen aufgeführt

1. Impulse Invariant Design
2. Step Invariant Design
3. Bilinear Transform Design
4. Yule-Walker-Algorithmus (numerisch-iterative Methode)

Für die Praxis werden praktisch nur die Methoden 3 und 4 benutzt. Die Bilineare Z-Transformation erlaubt eine direkte Umrechnung der analogen Übertragungsfunktion $G(s)$ in die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion $G(z)$. Zu bemerken ist, dass die vier Verfahren nicht genau dieselben Resultate liefern.

Vorteil der IIR-Filter ist die einfachere, kürzere Struktur, verglichen mit einem FIR-Filter, bei gleichen Sperrforderungen. Nachteilig ist Empfindlichkeit auf Schwingvorgänge, ausgelöst durch Bereichsüberläufe und die hohen Anforderungen an die Rechengenauigkeit.

5.4.13 Entwurfsprozess

IIR Filter werden praktisch ausschliesslich mit Hilfe der Bilinearen Z-Transformation synthetisiert. Aus der Filteranforderung wird in einem ersten Schritt das analoge Filter, resp. die Übertragungsfunktion bestimmt. Diese wird dann mit der Bilinearen Z-Transformation in die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion übergeführt.

Sämtliche dieser Schritte sind einfach und exakt durchzuführen. IIR-Filter sind deshalb bezüglich der Grenzfrequenzen und Welligkeiten exakt, mindestens solange die Koeffizienten- und Rechengenauigkeit gewährleistet ist.

5.4.14 Eigenschaften der IIR-Filter

Das Übertragungsverhalten des IIR-Filter kann durch die frequenzdiskrete Übertragungsfunktion gemäss (5-5) dargestellt werden:

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} \quad (5-21)$$

Im Regelfall haben das Zähler- und Nennerpolynom denselben Grad, unabhängig vom Typ des Filters.

Die zugehörige Differenzgleichung beschreibt das Verhalten im Zeitbereich:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k) \quad (5-22)$$

Aus Kap. 5.3 wissen wir, dass dies ein LTI System verkörpert. Es kann mit den Grundbausteinen Addierer, Multiplizierer und Zeitverzögerung um eine Taktperiode aufgebaut werden.

Man unterscheidet dabei folgende Blockstrukturen:

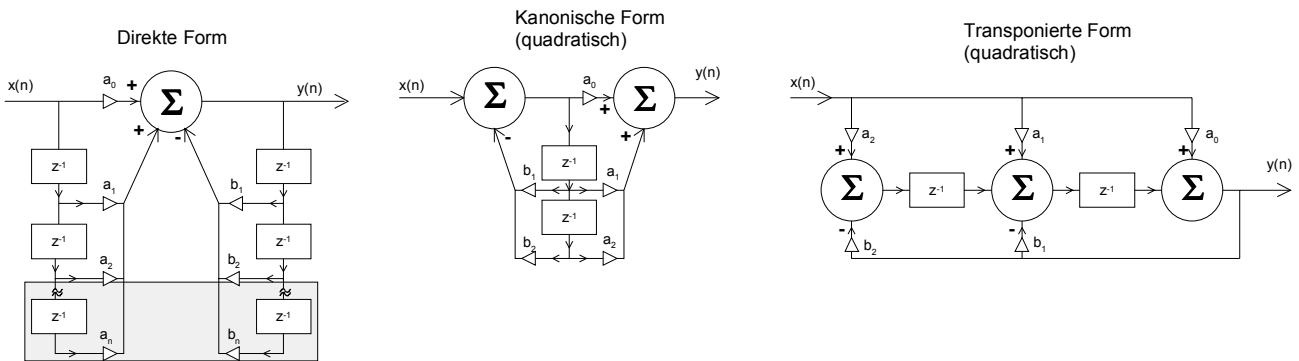


Bild 5-21: Blockstrukturen für IIR-Filter.

Sie unterscheiden sich im Aufwand und der im Betrieb erreichbaren Stabilität. Wie bei aktiven Filter ist es sinnvoll, ja sogar notwendig, eine Übertragungsfunktion höheren Grades in eine Kaskade von Gliedern zweiten Grades aufzuspalten.

5.4.15 Stabilität

Alle Eigenschaften des Systems werden bis auf den konstanten Faktor a_0 durch die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion (5-21) beschrieben. Sie kann nach [Grü99] in Linearfaktoren zerlegt werden und hat dann die Form:

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} = a_0 z^{M-N} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)} \quad (5-23)$$

z_1, \dots, z_N sind die Nullstellen. An diesen Stellen wird der Wert der Übertragungsfunktion Null. p_1, \dots, p_M sind die Pole. An diesen Stellen strebt der Wert der Übertragungsfunktion nach Unendlich.

Da die Übertragungsfunktion reelle Koeffizienten hat, können die Pole einfach reell oder konjugiert komplex auftreten. Bei IIR-Filter treten sie praktisch immer konjugiert komplex auf.

Bei einem stabilen digitalen System müssen alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen. Begründung: Beim frequenzkontinuierlichen System müssen alle Pole in der linken liegen. Die Z-Transformation legt die gesamte linke $j\omega$ -Halbebene in den Einheitskreis. Es gelten im übertragenen Sinne dieselben Kriterien für Stabilität.

Das am nächsten beim Einheitskreis liegende (komplexe) Polpaar heisst dominanter Pol. Er beeinflusst massgeblich das Einschwingverhalten. Je näher es beim Kreisrand liegt, desto länger dauert der Einschwingvorgang. (Wie beim analogen System)

Beispiel 5-11: Stabilitätsbetrachtung bei einem IIR-Filter

Man beurteile, ob die folgende Übertragungsfunktion eines IIR-Filters ein stabiles System darstellt. Im Falle der Stabilität wäre das dominante Polpaar zu bestimmen.

$$G(z) = \frac{1.562 \cdot 10^{-2} + 3.014 \cdot 10^{-3} z^{-1} - 2.521 \cdot 10^{-2} z^{-2} + 3.014 \cdot 10^{-3} z^{-3} + 1.562 \cdot 10^{-2} z^{-4}}{1 - 3.335z^{-1} + 4.328z^{-2} - 2.565z^{-3} + 0.5845z^{-4}}$$

Lösung:

Die Pole und Nullstellen werden mit Rechnung in MathCad gemäss Bild 5-22. Da alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen (Beträge < 1), ist das Stabilitätskriterium erfüllt. Das Polpaar 0.904±0.372j ist dominant.

Vorgaben:

Zähler-Nennerkoeffizienten

$$a := \begin{pmatrix} 1.562 \cdot 10^{-2} \\ 3.014 \cdot 10^{-3} \\ -2.521 \cdot 10^{-2} \\ 3.014 \cdot 10^{-3} \\ 1.562 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 0.5845 \\ -2.565 \\ 4.328 \\ -3.335 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnungen:

ra := nullstellen(a) ra = $\begin{pmatrix} -1 - 5.802i \times 10^{-3} \\ -1 + 5.802i \times 10^{-3} \\ 0.904 - 0.429i \\ 0.904 + 0.429i \end{pmatrix}$ Nullstellen

rb := nullstellen(b) rb = $\begin{pmatrix} 0.763 + 0.17i \\ 0.763 - 0.17i \\ 0.904 - 0.372i \\ 0.904 + 0.372i \end{pmatrix}$ Pole

i := 0..länge(rb) - 1

|rb_i| =

0.782
0.782
0.977
0.977

Dominanter konj. komplexer Pol

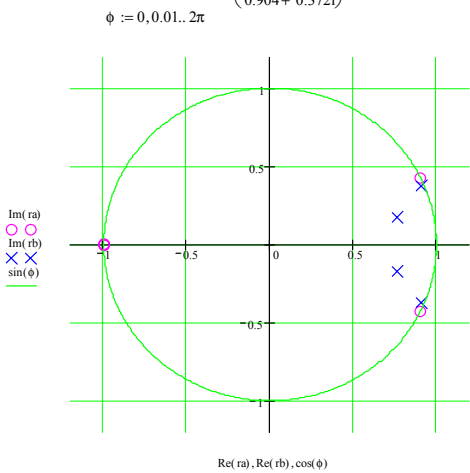


Bild 5-22: Stabilitätsbetrachtung an einem IIR-Filter in Beispiel 5-11. Alle Pole x liegen innerhalb des Einheitskreises. Das Polpaar, das am nächsten zu Kreisrand liegt ist dominant.

5.4.16 Filterkoeffizienten

Der Entwurf von IIR-Filter erfolgt praktisch ausschliesslich mit Bilinearer Z-Transformation. Impuls-Invariant- oder Sprung-Invariant-Methoden ergeben eine schlechte Transformation bei höheren Frequenzen, so dass sie für Hochpass- oder Bandsperrensynthese ungeeignet sind. Vgl hierzu auch [THE95] S. 227-237.

Die Anwendung und elementare Grundlagen der Z-Transformation wurde bereits in Kap. 3 aufgezeigt. Nachfolgend wollen wir etwas detaillierter einige Sachverhalte begründen.

Zuordnung analoge - digitale Frequenzen

Bei der Bilinearen Z-Transformation wird einer analogen Frequenz ω eine digitale Frequenz Ω zugeordnet. Diese Zuordnung erfolgt so, dass der analoge Frequenzbereich $[0, \infty)$ in den digitalen Bereich $[1, \pi)$ abgebildet wird, und zwar so dass die rechte Seite der s-Ebene in den Einheitskreis der z-Ebene fällt. Die Transformationsvorschrift hierzu ist $s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$:

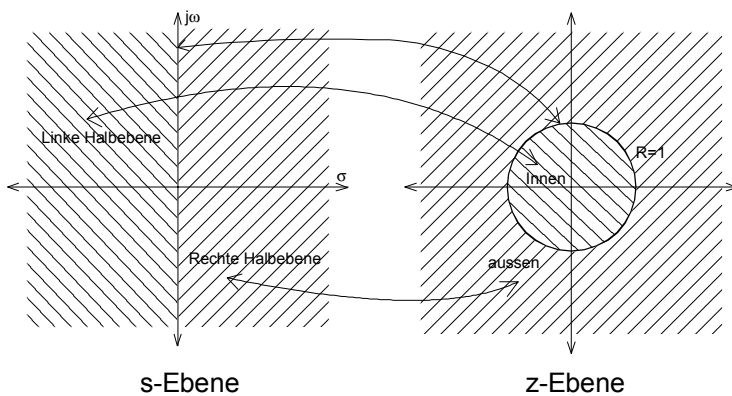


Bild 5-23: Vergleich der s- und z-Ebene bei der Z-Transformation

Wir untersuchen die Zuordnung indem wir z in Euler-Form $z = R \cdot e^{j\Omega}$ schreiben. Ω verkörpert für diese Betrachtung die digitale Frequenz. Somit wird die Transformationsgleichung:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{R \cdot e^{j\Omega} - 1}{R \cdot e^{j\Omega} + 1} \quad (5-24)$$

Dies kann in kartesische Form gebracht und vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T_s} \frac{R \cdot \cos(\Omega) - 1 + j \cdot R \cdot \sin(\Omega)}{R \cdot \cos(\Omega) + 1 + j \cdot R \cdot \sin(\Omega)} = \frac{2}{T_s} \frac{((R \cdot \cos(\Omega) - 1) + j \cdot R \cdot \sin(\Omega))((R \cdot \cos(\Omega) + 1) - j \cdot R \cdot \sin(\Omega))}{((R \cdot \cos(\Omega) + 1) + j \cdot R \cdot \sin(\Omega))((R \cdot \cos(\Omega) + 1) - j \cdot R \cdot \sin(\Omega))} \\ &= \frac{2}{T_s} \left(\frac{R^2 - 1}{R^2 + 2R \cdot \cos(\Omega) + 1} + j \frac{2R \cdot \sin(\Omega)}{R^2 + 2R \cdot \cos(\Omega) + 1} \right) \end{aligned} \quad (5-25)$$

Die Untersuchung der Zuordnung erfolgt durch Auswerten entlang der imaginären Frequenzachse $j\omega$, d.h. entlang des Kreisrandes mit $R=1$ in der z-Ebene

$$\begin{aligned} j\omega_{ana} &= \frac{2}{T_s} j \frac{2 \cdot \sin(\Omega_{dig})}{2 + 2 \cdot \cos(\Omega_{dig})} = \frac{2}{T_s} j \frac{\sin(\Omega_{dig})}{1 + \cos(\Omega_{dig})} & \Omega_{dig} &: \text{Digitale Kreisfrequenz} \\ \omega_{ana} &= \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\Omega_{dig}}{2}\right) & \omega_{ana} &: \text{Analoge Kreisfrequenz} \end{aligned} \quad (5-26)$$

$$f_{ana} = \frac{f_s}{\pi} \tan\left(\frac{f_{dig} \cdot \pi}{f_s}\right) \quad \Omega_{dig} = \frac{2\pi \cdot f_{dig}}{f_s}$$

Daraus folgt direkt umgekehrte Zuordnung:

$$\Omega_{dig} = 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\omega_{ana} T_s}{2}\right) \quad f_{dig} = \frac{f_s}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{f_{ana} \cdot \pi}{f_s}\right) \quad \begin{array}{l} \Omega_{dig} : \text{Digitale Kreisfrequenz} \\ \omega_{ana} : \text{Analoge Kreisfrequenz} \end{array} \quad (5-27)$$

Man erkennt, dass die Transformation die Frequenzachse vor allem für höhere Frequenzen stark verzerrt, im Sinne einer Stauchung. Dies wird beim Filterentwurf durch das *Prewarping* berücksichtigt.

Bilineare Transformation für lineare und quadratische Glieder

Liegt aus der Synthese des analogen Prototyps die Übertragungsfunktion in Form quadratischer oder linearer Glieder vor kann die z-Transformation sehr einfach durchgeführt werden. Da die Implementierung von IIR-Filter in ein DSP-System sowieso mit linearen/quadratischen Gliedern erfolgt, genügen für die Praxis die nachfolgenden Zusammenhänge zu Synthese der Filterkoeffizienten.

Dazu wird zuerst die allgemeine z-Transformation mit beliebigen Koeffizienten bestimmt.

Für das lineare Glied $G(s) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s}$ wird dies:

$$G(z) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s} \Bigg|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{A_0 + A_1 \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}}{B_0 + B_1 \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

$$G(z) = \frac{A_0 - 2f_s A_1 + z(A_0 + 2f_s A_1)}{B_0 - 2f_s B_1 + z(B_0 + 2f_s B_1)} \quad (5-28)$$

Für das quadratische Glied $G(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2}$ wird dies analog:

$$G(z) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2} \Bigg|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{A_0 + A_1 \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + A_2 \frac{4}{T_s^2} \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}{B_0 + B_1 \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + B_2 \frac{4}{T_s^2} \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

$$G(z) = \frac{z^2(A_0 + 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2) + z(2A_0 - 8f_s^2 A_2) + (A_0 - 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2)}{z^2(B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2) + z(2B_0 - 8f_s^2 B_2) + (B_0 - 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2)} \quad (5-29)$$

Für die einfache Bestimmung der in DSP benutzten Differenzgleichungen notieren wir negative Potenzen und setzen beim Nennerpolynom b_0 auf 1:

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad \left(G(s) = \frac{A_0 + A_1 s}{B_0 + B_1 s} \right) \quad (5-30)$$

mit:

$$a_0 = \frac{A_0 + 2f_s A_1}{B_0 + 2f_s B_1} \quad b_1 = \frac{B_0 - 2f_s B_1}{B_0 + 2f_s B_1}$$

$$a_1 = \frac{A_0 - 2f_s A_1}{B_0 + 2f_s B_1}$$

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad \left(G(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2} \right) \quad (5-31)$$

mit:

$$a_0 = \frac{A_0 + 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2} \quad b_1 = \frac{2B_0 - 8f_s^2 B_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}$$

$$a_1 = \frac{2A_0 - 8f_s^2 A_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2} \quad b_2 = \frac{B_0 - 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}$$

$$a_2 = \frac{A_0 - 2A_1 f_s + 4f_s^2 A_2}{B_0 + 2B_1 f_s + 4f_s^2 B_2}$$

Unter Kenntnis dieser Zusammenhänge kann eine Filtersynthese für beliebige IIR-Filter einfach programmiert werden, da der Filterprototyp immer direkt aus den berechneten Polen/Nullstellen als Kaskade quadratischer Glieder und einem linearen Glied formuliert werden kann.

Für den umgekehrten Fall kann aus der frequenzdiskreten Übertragungsfunktion $G(z)$ die frequenzkontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ bestimmt werden. Die Herleitung erfolgt analog.

$$G(s) = \frac{A_0 + A_1 \cdot s}{B_0 + B_1 \cdot s} \quad \left(G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{b_0 + b_1 z^{-1}} \right) \quad (5-32)$$

mit:

$$A_0 = 2f_s (a_0 + a_1) \quad B_0 = 2f_s (b_0 + b_1)$$

$$A_1 = a_0 - a_1 \quad B_1 = b_0 - b_1$$

$$G(s) = \frac{A_0 + A_1 \cdot s + A_2 \cdot s^2}{B_0 + B_1 \cdot s + B_2 \cdot s^2} \quad \left(G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \right) \quad (5-33)$$

mit:

$$A_0 = 4f_s^2 (a_0 + a_1 + a_2) \quad B_0 = 4f_s^2 (b_0 + b_1 + b_2)$$

$$A_1 = 4f_s (a_0 - a_2) \quad B_1 = 4f_s (b_0 - b_2)$$

$$A_2 = (a_0 - a_1 + a_2) \quad B_2 = (b_0 - b_1 + b_2)$$

Beispiel 5-12: Z-Transformation einer analogen Übertragungsfunktion $G(s)$ in $G(z)$

Die analoge Übertragungsfunktion eines Butterworth-Hochpassfilters 3. Ordnung mit 1kHz analoger Grenzfrequenz soll in eine digitale Übertragungsfunktion mit Samplefrequenz $f_s=16\text{kHz}$ übergeführt werden:

$$G(s) = \frac{s^3}{s^3 + 12566.4s^2 + 7.89568 \cdot 10^7 s + 2.48050 \cdot 10^{11}}$$

Lösung:

In einem ersten Schritt wird die Funktion in ein quadratisches und lineares Glied aufgespalten:

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 6283.19s + 3.94784 \cdot 10^7} \cdot \frac{s}{s + 6283.19}$$

Diese Glieder werden nun nach (5-30),(5-31):

$$G(z) = \frac{a_{10} + a_1 z^{-1}}{1 + b_{11} z^{-1}} \cdot \frac{a_{20} + a_{21} z^{-1} + a_{22} z^{-2}}{b_{20} + b_{21} z^{-1} + b_{22} z^{-2}} \quad \left(G(s) = \frac{A_{10} + A_{11}s}{B_{10} + B_{11}s} \cdot \frac{A_{20} + A_{21}s + A_{22}s^2}{B_{20} + B_{21}s + B_{22}s^2} \right)$$

mit:

$$a_{10} = \frac{A_{10} + 2f_s A_{11}}{B_{10} + 2f_s B_{11}}$$

$$b_{11} = \frac{B_{10} - 2f_s B_1}{B_{10} + 2f_s B_1}$$

$$a_{11} = \frac{A_0 - 2f_s A_{11}}{B_{10} + 2f_s B_{11}}$$

$$a_{20} = \frac{A_{20} + 2A_{21}f_s + 4f_s^2 A_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$b_{21} = \frac{2B_{20} - 8f_s^2 B_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$a_{21} = \frac{2A_{20} - 8f_s^2 A_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$b_{22} = \frac{B_{20} - 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

$$a_{22} = \frac{A_{20} - 2A_{21}f_s + 4f_s^2 A_2}{B_{20} + 2B_{21}f_s + 4f_s^2 B_{22}}$$

Numerische Lösung wird:

$$G(z) = \frac{0.80978 - 1.61956z^{-1} + 0.80978z^{-2}}{1 - 1.55712z^{-1} + 0.682z^{-2}} \cdot \frac{0.83588 - 0.83588z^{-1}}{1 - 0.67175z^{-1}}$$

Vorgaben:

$$f_S := 16\text{kHz}$$

$$A_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_2 := \begin{pmatrix} 3.9478410^7 \\ 6283.19 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_1 := \begin{pmatrix} 6283.19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnungen:

$$a_2 := \begin{pmatrix} A_2 + 2 \cdot A_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot A_2 \cdot s^2 \\ 2 \cdot A_2 - 8 \cdot f_S^2 \cdot A_2 \cdot s^2 \\ A_2 - 2 \cdot A_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot A_2 \cdot s^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_2 + 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0.80978 \\ -1.61956 \\ 0.80978 \end{pmatrix}$$

Quadratisches Glied

$$b_2 := \begin{pmatrix} B_2 + 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2 \\ 2 \cdot B_2 - 8 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2 \\ B_2 - 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_2 + 2 \cdot B_2 \cdot f_S \cdot s + 4 \cdot f_S^2 \cdot B_2 \cdot s^2} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.55712 \\ 0.682 \end{pmatrix}$$

$$a_1 := \begin{pmatrix} A_1 + 2 \cdot f_S \cdot A_1 \cdot s \\ A_1 - 2 \cdot f_S \cdot A_1 \cdot s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_1 + 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0.83588 \\ -0.83588 \end{pmatrix}$$

Lineares Glied

$$b_1 := \begin{pmatrix} B_1 + 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s \\ B_1 - 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{B_1 + 2 \cdot f_S \cdot B_1 \cdot s} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.67175 \end{pmatrix}$$

Die Richtigkeit des Resultates kann durch die Kontrolle der Dämpfung bei der Grenzfrequenz kontrolliert werden. Dabei muss aber bereits der Einfluss der Spektrumverzerrung berücksichtigt werden:

Kontrolle der Grenzfrequenz:

$$f_{\text{Cdig}} := 1\text{kHz}$$

Inverses Prewarping:

$$f_{\text{Cana}} := \frac{f_S}{\pi} \cdot \text{atan} \left(\frac{\pi \cdot f_{\text{Cdig}}}{f_S} \right) \quad f_{\text{Cana}} = 987.43827\text{Hz}$$

$$G(z) := \frac{\sum_{i=0}^{\text{letzte}(a_1)} a_1 \cdot z^{-i} \cdot \sum_{i=0}^{\text{letzte}(a_2)} a_2 \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^{\text{letzte}(b_1)} b_1 \cdot z^{-i} \cdot \sum_{i=0}^{\text{letzte}(b_2)} b_2 \cdot z^{-i}}$$

$$\text{dB} \left(\left| G \left(e^{j 2\pi \frac{f_{\text{Cana}}}{f_S}} \right) \right| \right) = -3.01031$$

Die minimale Abweichung von -3.01dB ist durch beschränkte Koeffizientengenauigkeit in der Aufgabenstellung begründet.

Beispiel 5-13: Bestimmen der analogen Übertragungsfunktion $G(s)$ aus $G(z)$

Man bestimme die frequenzkontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ des folgenden digitalen Filters mit einer Samplefrequenz $f_s=16\text{kHz}$.

$$G(z) = \frac{7.839 \cdot 10^{-2} z^2 - 7.839 \cdot 10^{-2}}{z^2 - 1.351z + 0.8439}$$

Lösung:

Grundsätzlich kann man die Definition der inverse Z-Transformation einsetzen und ausrechnen. Einfacher findet man unter Verwendung von (5-33) direkt:

$$G(z) = \frac{7.839 \cdot 10^{-2} z^2 - 7.839 \cdot 10^{-2}}{z^2 - 1.351z + 0.8439} = \frac{7.839 \cdot 10^{-2} - 7.839 \cdot 10^{-2} z^{-2}}{1 - 1.351z^{-1} + 0.8439z^{-2}}$$

und erhält:

$$G(s) = \frac{1.00339 \cdot 10^4 s}{3.1949s^2 + 9.9904 \cdot 10^3 s + 5.0473 \cdot 10^8} = \frac{3.14061 \cdot 10^3 s}{s^2 + 3.12698 \cdot 10^3 s + 1.5798 \cdot 10^8}$$

5.5 Literatur zum digitaler Filter und FFT

- [SMI94] Handbook of Real-Time Fast Fourier Transforms, W.W. Smith/J.M Smith, IEEE Press 1994, ISBN 0-7803-1091-8
- [GRU01] Digitale Signalverarbeitung, D. v. Grünigen, Fachbuchverlag Leipzig 2001, ISBN 3-446-21445-3
- [THE95] Analog and Digital Filter Design using C, L. Thede, Prentice-Hall PTR 1995, ISBN 0-13-352627-5
- [WHI00] Digital Signal Processing, S. White, Delmar 2000, ISBN 0-7668-1531-5
- [EMB91] C Language Algorithms for Digital Signal Processing, P.M. Embree/ B. Kimble, Prentice-Hall International Publications 1991, ISBN 0-13-137852-X
- [STE88] Signal Processing Algorithms, S.D. Stearns/ R.A. David, Prentice-Hall Inc, 1988, ISBN 0-13809435-7
- [TIE99] Halbleiter Schaltungstechnik, U. Tietze/Ch. Schenk, Springer Verlag 1999, ISBN 3-540-64192-0, Kapitel 21



Digitale Übertragungsfunktion

Die digitale Übertragungsfunktion $G(z)$ beschreibt im Zeit oder Frequenzbereich das Verhalten des digitalen Systems.